CONCOURS EXTERNE 1994
D'ELEVE-INGENIEUR DES TRAVAUX DE LA METEOROLOGIE

-=-=-=-=-=-=-

EPREUVE OBLIGATOIRE A OPTION :
MATHEMATIQUES (II)

-=-=-=-=-=-=-

Durée : 4 heures Coefficient : 6

Les deux problèmes sont indépendants. Le soin dans la présentation et la rigueur des raisonnements interviennent dans la notation.

- I -

Sauf mention contraire toutes les fonctions considérées par la suite sont des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ définies sur un ouvert de Ω de $\mathbb{R}^n$.

On considère l'équation aux dérivées partielles (1) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$

On appelle fonction harmonique sur Ω une fonction vérifiant (1) en tout point de Ω.

1) a) Montrer que les fonctions harmoniques forment un espace vectoriel.

b) Montrer que si f est harmonique de classe $\mathcal{C}^n$, les dérivées partielles de f d'ordre $m \leq n-2$ sont harmoniques.

c) Déterminer les fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}$.

d) - Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que f soit harmonique sur $\Omega =]x_1, x_2[\times]y_1, y_2[\subset \mathbb{R}^2$ est qu'il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$

- Montrer que g est harmonique.

e) Trouver une condition pour qu'une forme quadratique de $\mathbb{R}^n$ soit harmonique.

2) On appelle fonction radiale une fonction f vérifiant:
$\forall\ x \in \Omega \quad \exists\ g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$: $f(x) = g(|x|)$ où $|x|$ désigne la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^n$.

a) Soit ψ: $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et χ: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Enoncer la formule donnant les dérivées partielles de $\chi \circ \psi$ en fonction de celles de χ et de celles de ψ.

b) Montrer que f radiale est harmonique sur I x ω si et seulement si g vérifie sur I une équation différentielle que l'on précisera. I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}^{+*}$ et ω un ouvert de la sphère unité Σ^{n-1} de $\mathbb{R}^{n-1}$.

c) Déterminer les fonctions harmoniques radiales de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

d) Caractériser les fonctions harmoniques radiales bornées sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

3) On appelle fonction homogène de degré k une fonction vérifiant $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_i, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

a) Etablir pour f homogène de degré k la relation:

$$f(x) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \ ;$$

on considèrera $g_{\overrightarrow{x}}$: $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & f(\lambda \overrightarrow{x}) \end{array}$

b) Montrer que si f est homogène de degré k, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont homogènes, on précisera leur degré.

c) Montrer que si $f(x) = x_i\ h_i(x)$ où h_i est une fonction polynôme harmonique homogène de degré k-1, on a alors: (2) $f(x) = h(x) + |x|^2\ g(x)$ avec h une fonction polynôme harmonique homogène de degré k et g une fonction polynôme homogène de degré k-2. On pourra considérer les fonctions:
$h_\lambda(x) = x_i\ h_i(x) - \lambda\ |x|^2 \frac{\partial h_i}{\partial x_i}$.

d) Par récurrence montrer à l'aide des résultats précédents que toute fonction polynôme homogène de degré k s'écrit sous la forme (2).

e) En déduire que toute fonction polynôme homogène de degré k s'écrit:

$\sum_{0 \le p \le k/2} |x|^{2p}\ h_{k-2p}(x)$ où h_{k-2p} est une fonction polynôme harmonique homogène de degré k-2p.

4) Soit P_k^n l'espace vectoriel des fonctions polynômes de $\mathbb{R}^n$ homogènes de degré k,

Soit Y_k^n l'espace vectoriel des fonctions polynômes de $\mathbb{R}^n$ homogènes de degré k et harmoniques.

a) Déterminer dim P_0^n, dim P_1^n, dim Y_0^n, dim Y_1^n, dim P_k^1, dim Y_k^1.

b) Etablir dim $P_k^n = \sum_{\ell=0}^{k} \dim P_\ell^{n-1}$.

c) Etablir à l'aide du résultat du 3)e) dim $P_k^n = \sum_{p=0}^{k/2} \dim Y_{k-2p}^n$.

d) Montrer que dim $Y_k^n = \sum_{\ell=0}^{k} \dim Y_\ell^{n-1}$

e) Déterminer dim Y_k^2, dim Y_k^3 et dim Y_k^4.

- II -

1) Pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}^+$ on considère les suites:

$$u_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \alpha \frac{x^n}{n!}$$

(On adopte la convention : $\frac{x^0}{0!} = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$).

a) Montrer que ces suites sont monotones à partir d'un certain rang.

b) Etablir que $\forall\, \alpha \geq \beta \geq 0 \quad \forall\, x > y \geq 0 \quad u_n^\alpha(x) > u_n^\beta(y)$.

c) En déduire que $\theta_n(x)$ défini ($\forall\, x \in \mathbb{R}^+$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$) par:
$e^x = u_n^0(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{x.\theta_n(x)}$ prend ses valeurs dans le segment $]0,1[$.

d) Démontrer que les suites $(u_n^{\alpha}(x))$ convergent et trouver leur limite.

e) Déterminer b_α : $x \in]0, b_\alpha[\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad e^x < u_n^{\alpha}(x)$.

2) $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$ on définit pour A, partie de $\mathbb{N}$, la suite:

$$s_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\phi_A(k)}{k!} a^k$$

où $\phi_A : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$k \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } k \in A \\ 0 \text{ si } k \notin A \end{cases}$$

a) Montrer que $s_n(A)$ est convergente.

b) On pose $\lim_{n \longrightarrow +\infty} s_n(A) = m(A)$, calculer $m(\phi)$, $m(\{p\})$, $m(\mathbb{N})$.

c) Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N)$.

Si $A \subset B$ quelle relation a-t-on entre $m(A)$ et $m(B)$?

En déduire $\inf_{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})} m(A)$ et $\sup_{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})} m(A)$.

d) Montrer les relations suivantes:

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$$

$$m(A \cap C_{\mathbb{N}}B) - m(B \cap C_{\mathbb{N}}A) = m(A) - m(B) \text{ où}$$

$C_{\mathbb{N}}X = \{n \in \mathbb{N} : n \notin X\}$

3) Soit A et B deux parties de $\mathbb{N}$; on désigne par p le plus petit élément de $A \cup B$ n'appartenant pas à $A \cap B$.

a) En supposant $p \in A$ et donc $p \notin B$, montrer que si $\alpha \in]0, \text{Ln}(2)[$ on a $m(B) < m(A \cap B) + \frac{a^p}{p!} \leq m(A)$.

Préciser dans quel cas on à l'égalité.

b) En déduire que si $a \in]0, \text{Ln}(2)[$, $m : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \longmapsto m(A)$ est une injection.

4) a) Soit un ensemble E quelconque non vide, montrer qu'il n'existe pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$.

b) Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.